Problemas conceptuales y operativos en la enseñanza de las leyes integrales del electromagnetismo para los cursos introductorios

Francisco Albani[1], María Luz Franqueiro[1,2], Santiago González Zerbo[1], Gastón Manestar[1], Lucas Perfumo[1], Eduardo Poggio[1], Gabriel Raffa[1], Juan P. Robbiano[1], Daniela Yóvine[1].

Supervisado por: Liliana I. Perez[1,2,3] y Guillermo Santiago[1,4].

[1] Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA
[2] Grupo de Óptica y Visión, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA
[3] CONICET
[4] Laboratorio Láser, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

CONICET

LaserLab-FIUBA

El cálculo del campo eléctrico generado por distribuciones acotadas de carga suele involucrar ciertas aproximaciones cuya calidad no siempre llega a apreciarse. *¿Es la Ley de Gauss sólo una curiosidad matemática sin valor práctico? ¿Existe alguna situación del mundo real que pueda ser razonablemente analizada con la Ley de Gauss?* En este trabajo, realizado entre docentes y alumnos ya formados, nos proponemos justificar una respuesta afirmativa a esta última pregunta mediante la comparación de los resultados obtenidos por los dos caminos habituales: el primero, utilizando la Ley de Coulomb y el Principio de Superposición, y el segundo, utilizando la Ley de Gauss.

Nuestro objetivo es desarrollar criterios que permitan decidir las condiciones para las cuales una situación práctica pueda ser aproximada por las relaciones obtenidas en base a sistemas de extensión infinita.

El hilo, ¿es infinito?

Si tenemos un hilo de dimensiones acotadas, ¿cuánto daño puede hacernos considerarlo infinito? Evidentemente la respuesta dependerá no sólo de las dimensiones; también dependerá de la distancia a la que nos hagamos la pregunta. A continuación calcularemos el campo eléctrico generado por una distribución de carga rectilínea uniforme. Ubicaremos el hilo en el eje x de tal manera que un extremo quede en $-L_i$ y otro en L_d. Analizaremos el campo a una distancia d sobre el eje y.

$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\int_{-L_i}^{+L_d}\frac{-x'\,dx'}{(x'^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{i} + \left(\int_{-L_i}^{+L_d}\frac{d\,dx'}{(x'^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{j} + \underbrace{\left(\int_{-L_i}^{+L_d}\frac{0\,dx'}{(x'^2+d^2)^{3/2}}\right)}_{=0}\hat{k}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{L_d^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{L_i^2+d^2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{L_d/d}{\sqrt{L_d^2+d^2}} + \frac{L_i/d}{\sqrt{L_i^2+d^2}}\right)\hat{j}\right]$$

A continuación factorizaremos de forma conveniente para hacer aparecer a los factores L_d/d y L_i/d, de manera tal que podremos adimensionalizar el problema:

$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{(L_d/d)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(L_i/d)^2+1}}\right)\hat{i} + \left(\frac{L_d/d}{\sqrt{(L_d/d)^2+1}} + \frac{L_i/d}{\sqrt{(L_i/d)^2+1}}\right)\hat{j}\right]$$

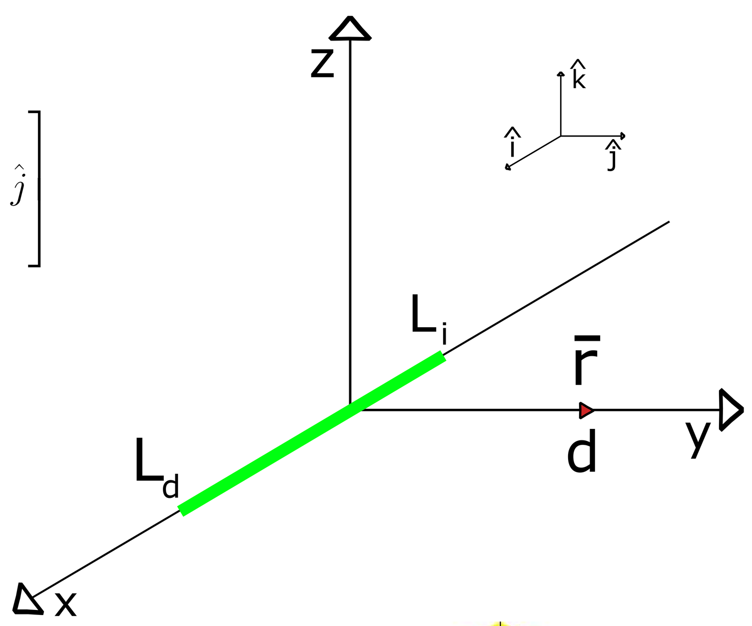
Es interesante verificar, por un lado, que si los extremos tienden a infinito, se recupera la conocida expresión $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{j}$ obtenida con la Ley de Gauss, y, por otro, que si $L_d = L_i = L$ se obtiene la **misma** expresión pero multiplicada por un factor de corrección:

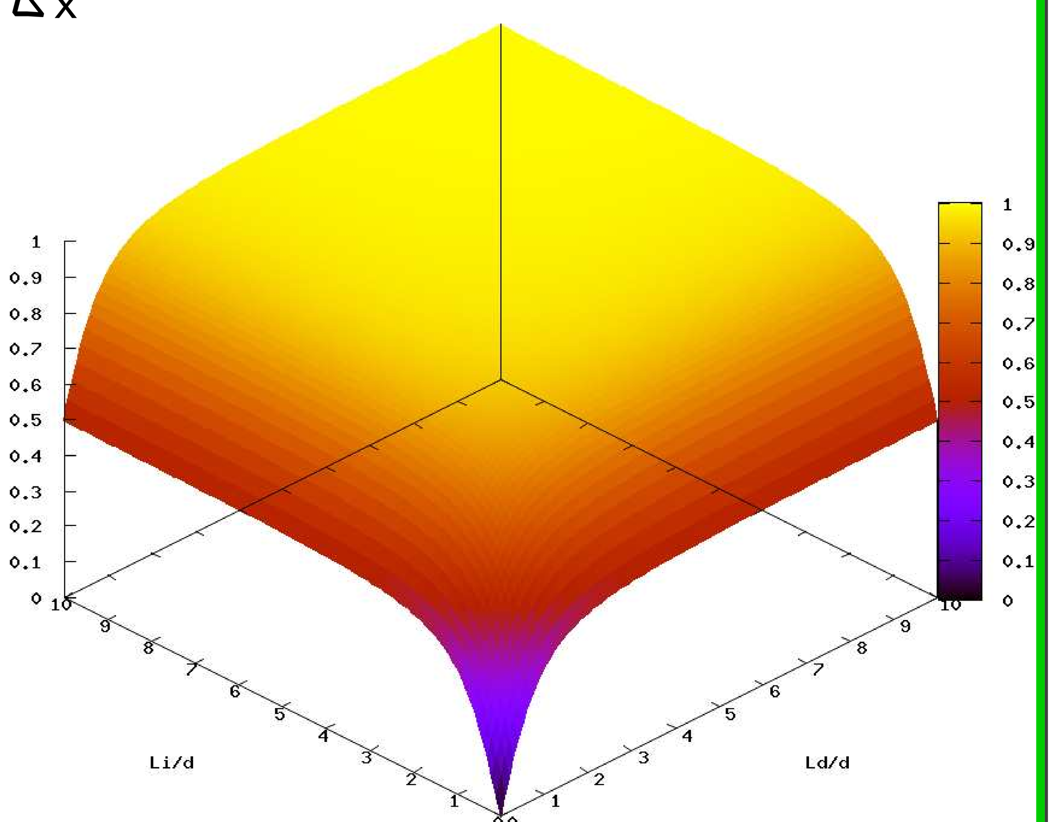
$$\boxed{\underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{j}}_{\text{hilo infinito}}} \cdot \boxed{\underbrace{\left[\frac{L/2d}{\sqrt{(L/d)^2+1}}\right]}_{\text{factor de corrección}}}$$

Si nos concentramos sólo en la componente sobre el eje y (que es la única que "sobreviviría" si el hilo fuera infinito), el factor de corrección es una función de las variables L_d/d y L_i/d:

$$\boxed{\frac{L_d/d}{\sqrt{(L_d/d)^2+1}} + \frac{L_i/d}{\sqrt{(L_i/d)^2+1}}}$$

Su gráfico puede apreciarse a la derecha.





¿Estamos 1cm por encima del centro de un hilo y a 5cm de cada uno de sus extremos?
El gráfico nos dice que el error al suponerlo infinito, será despreciable.

El infinito... no queda tan lejos.

Notar que cuando $Li/d = 0$ y $Ld >> d$, el factor de corrección es $1/2$. Ésto ***NO*** *debe interpretarse de la siguiente manera: "tengo la mitad de la recta entonces el resultado es la mitad", De ese modo se ignora totalmente la componente x del campo. El resultado es simplemente una coincidencia sólo en el eje y.*
NO *podemos emplear eficazmente la ley de Gauss porque al problema le falta "la mitad".*

¿Y el plano?

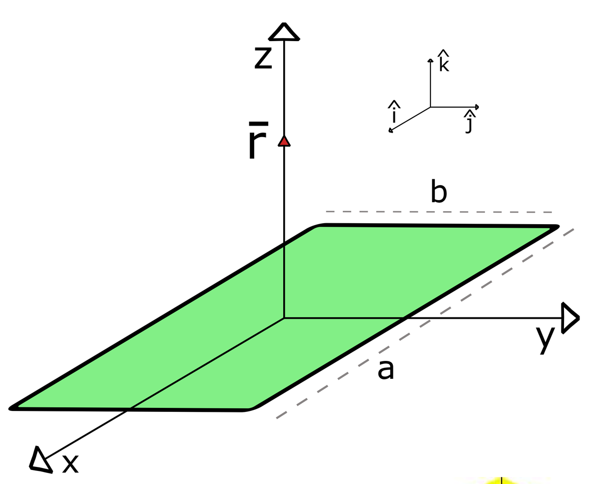
Si en vez de tener un plano infinito se tiene una "plancha" de lados a y b, ¿qué tanto error cometemos al suponerla infinita? Calcularemos el campo eléctrico a una distancia z del centro de la misma, donde la simetría nos permite deducir qué sólo tendrá dirección perpendicular a la plancha. Mediante la Ley de Coulomb, el Principio de Superposición, una completa tabla de integrales y un modesto trabajo algebraico, obtenemos la siguiente abominable expresión:

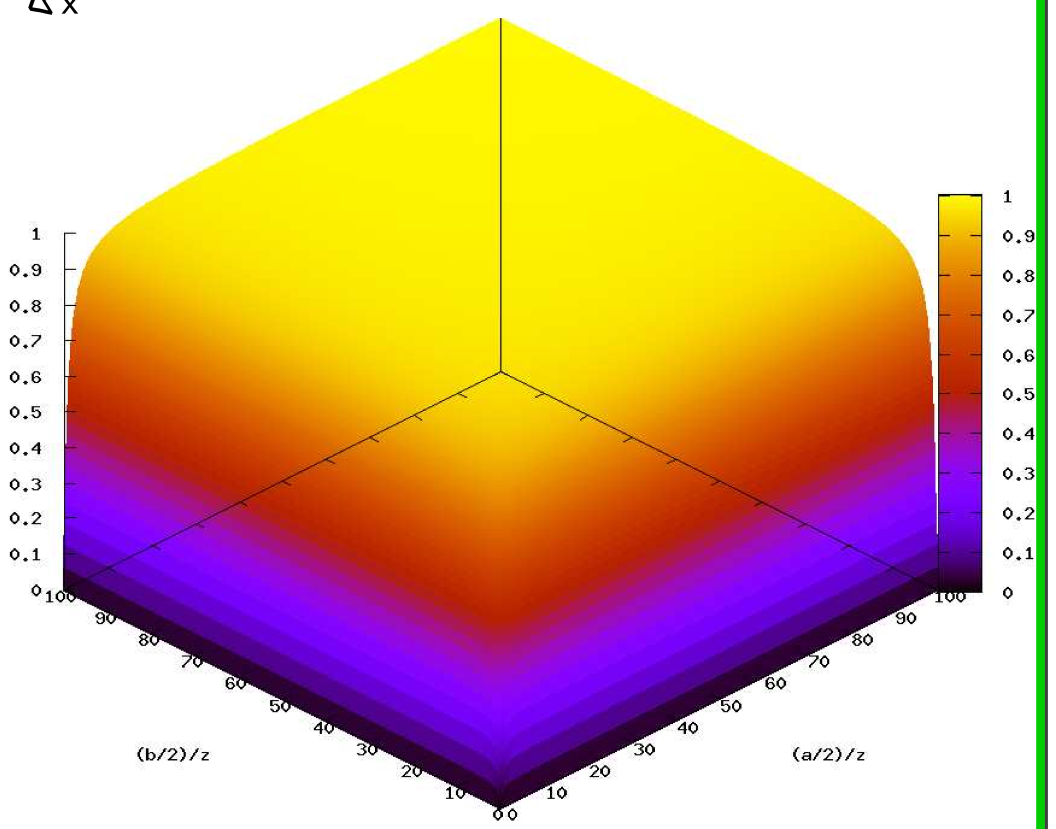
$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\frac{-x'\,dx'dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}_{=0\text{ por simetría}}\hat{i} + \underbrace{\left(\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\frac{-y'\,dx'dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}_{=0\text{ por simetría}}\hat{j} + \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\frac{z\,dx'dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{k}\right] = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}\arctan\left(\frac{ab}{4z\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+z^2}}\right)\hat{k}$$

que luego de ser factoreada inteligentemente, queda de la siguiente manera:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{k}}_{\text{plano infinito}}} \cdot \boxed{\underbrace{\left[\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a/2}{z}\cdot\frac{b/2}{z}\right)^{-2}+\left(\frac{a/2}{z}\right)^{-2}+\left(\frac{b/2}{z}\right)^{-2}}}\right)\right]}_{\text{factor de corrección}}}$$

Este resultado arroja una conclusión interesante: *el campo eléctrico generado por un plano finito puede expresarse como el campo que generaría si fuese infinito multiplicado por un factor de corrección.* Este factor es una función de las dimensiones de la "plancha" y de la distancia a la misma. Para adimensionar el problema, lo más cómodo es expresarlo como una función de los cocientes $\frac{a/2}{z}$ y $\frac{b/2}{z}$.
A la derecha puede apreciarse un gráfico del valor del factor de corrección en función de estas dos variables.





¿Estamos 1cm por encima del centro de una plancha de 100cm × 100cm?
El gráfico nos permite afirmar que el error al considerarla infinita, será despreciable.

El infinito... no queda tan lejos.

Hemos mostrado en qué condiciones, los resultados correspondientes a sistemas de dimensiones infinitas aplican razonablemente a sistemas limitados. Ésto es de utilidad en la enseñanza porque libera al alumno de la necesidad de una imposición, por parte del docente, de una regla "mágica" que le indique cómo resolver un problema en particular.